Лабораторная работа№6

Выполнил Берестнев И.В. 4ИСИП-519

**Транспортная задача**. **Методом потенциалов.**  
Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7 | 13 | 9 | 8 | 240 |
| A2 | 14 | 8 | 7 | 10 | 40 |
| A3 | 3 | 15 | 20 | 6 | 110 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.  
∑a = 240 + 40 + 110 = 390  
∑b = 90 + 190 + 40 + 130 = 450  
Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу с запасом груза, равным 60 (390—450). Тарифы перевозки единицы груза из базы во все магазины полагаем равны нулю.  
Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7 | 13 | 9 | 8 | 240 |
| A2 | 14 | 8 | 7 | 10 | 40 |
| A3 | 3 | 15 | 20 | 6 | 110 |
| A4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

**Этап I. Поиск первого опорного плана**.  
1. Используя *метод наименьшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.  
Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.  
Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.  
Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.  
Искомый элемент равен c31=3. Для этого элемента запасы равны 110, потребности 90. Поскольку минимальным является 90, то вычитаем его.  
x31 = min(110,90) = 90.  
Искомый элемент равен c11=7, но т.к. ограничения выполнены, то x11=0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7[0] | 13[130] | 9 | 8[110] | 240 |
| A2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 | 40 |
| A3 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] | 110 |
| A4 | 0 | 0[60] | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.  
2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является *невырожденным*.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 13\*130 + 8\*110 + 7\*40 + 3\*90 + 6\*20 + 0\*60 = 3240  
**Этап II. Улучшение опорного плана**.  
Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v1 = 7; 0 + v1 = 7; v1 = 7  
u3 + v1 = 3; 7 + u3 = 3; u3 = -4  
u3 + v4 = 6; -4 + v4 = 6; v4 = 10  
u1 + v2 = 13; 0 + v2 = 13; v2 = 13  
u4 + v2 = 0; 13 + u4 = 0; u4 = -13  
На данном этапе возникла ситуация, когда для оставшихся занятых клеток не известно ни одного из потенциалов. Это результат вырожденности решения. Для его преодоления в одну из клеток нужно внести нулевую поставку, таким образом, такая клетка станет условно занятой.  
Для неизвестного потенциала u2 нулевую поставку можно разместить в клетках:  
(2;1), v1=7  
(2;2), v2=13  
(2;4), v4=10  
Для неизвестного потенциала v3 нулевую поставку можно разместить в клетках:  
(1;3), u1=0  
(3;3), u3=-4  
(4;3), u4=-13  
Среди этих клеток, в которых может быть размещена нулевая поставка, наименьший тариф имеет клетка (4, 3) с c43 = 0. Следовательно, нулевую поставку размещаем в клетку (4, 3), и она становится условно занятой.  
u4 + v3 = 0; -13 + v3 = 0; v3 = 13  
Ранее поставленный псевдоноль из ячейки (1;1) убираем.  
u2 + v3 = 7; 13 + u2 = 7; u2 = -6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=7 | v2=13 | v3=13 | v4=10 |
| u1=0 | 7 | 13[130] | 9 | 8[110] |
| u2=-6 | 14 | 8 | 7[40] | 10 |
| u3=-4 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] |
| u4=-13 | 0 | 0[60] | 0[0] | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;3): 0 + 13 > 9; ∆13 = 0 + 13 - 9 = 4 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (1;3): 9  
Для этого в перспективную клетку (1;3) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 7 | 13[130][-] | 9[+] | 8[110] | 240 |
| 2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 | 40 |
| 3 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] | 110 |
| 4 | 0 | 0[60][+] | 0[0][-] | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Цикл приведен в таблице (1,3 → 1,2 → 4,2 → 4,3).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (4, 3) = 0. Прибавляем 0 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 0 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7 | 13[130] | 9[0] | 8[110] | 240 |
| A2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 | 40 |
| A3 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] | 110 |
| A4 | 0 | 0[60] | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 13; 0 + v2 = 13; v2 = 13  
u4 + v2 = 0; 13 + u4 = 0; u4 = -13  
u1 + v3 = 9; 0 + v3 = 9; v3 = 9  
u2 + v3 = 7; 9 + u2 = 7; u2 = -2  
u1 + v4 = 8; 0 + v4 = 8; v4 = 8  
u3 + v4 = 6; 8 + u3 = 6; u3 = -2  
u3 + v1 = 3; -2 + v1 = 3; v1 = 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=5 | v2=13 | v3=9 | v4=8 |
| u1=0 | 7 | 13[130] | 9[0] | 8[110] |
| u2=-2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 |
| u3=-2 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] |
| u4=-13 | 0 | 0[60] | 0 | 0 |

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(2;2): -2 + 13 > 8; ∆22 = -2 + 13 - 8 = 3 > 0  
Выбираем максимальную оценку свободной клетки (2;2): 8  
Для этого в перспективную клетку (2;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 7 | 13[130][-] | 9[0][+] | 8[110] | 240 |
| 2 | 14 | 8[+] | 7[40][-] | 10 | 40 |
| 3 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] | 110 |
| 4 | 0 | 0[60] | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Цикл приведен в таблице (2,2 → 2,3 → 1,3 → 1,2).  
Из грузов хij стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. у = min (2, 3) = 40. Прибавляем 40 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 40 из Хij, стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7 | 13[90] | 9[40] | 8[110] | 240 |
| A2 | 14 | 8[40] | 7 | 10 | 40 |
| A3 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] | 110 |
| A4 | 0 | 0[60] | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем *предварительные потенциалы* ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, полагая, что u1 = 0.  
u1 + v2 = 13; 0 + v2 = 13; v2 = 13  
u2 + v2 = 8; 13 + u2 = 8; u2 = -5  
u4 + v2 = 0; 13 + u4 = 0; u4 = -13  
u1 + v3 = 9; 0 + v3 = 9; v3 = 9  
u1 + v4 = 8; 0 + v4 = 8; v4 = 8  
u3 + v4 = 6; 8 + u3 = 6; u3 = -2  
u3 + v1 = 3; -2 + v1 = 3; v1 = 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=5 | v2=13 | v3=9 | v4=8 |
| u1=0 | 7 | 13[90] | 9[40] | 8[110] |
| u2=-5 | 14 | 8[40] | 7 | 10 |
| u3=-2 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] |
| u4=-13 | 0 | 0[60] | 0 | 0 |

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.  
Минимальные затраты составят: F(x) = 13\*90 + 9\*40 + 8\*110 + 8\*40 + 3\*90 + 6\*20 + 0\*60 = 3120  
**Анализ оптимального плана**.  
Из 1-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (90 ед.), в 3-й магазин (40 ед.), в 4-й магазин (110 ед.)  
Из 2-го склада необходимо весь груз направить в 2-й магазин.  
Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (90 ед.), в 4-й магазин (20 ед.)  
Потребность 2-го магазина остается неудовлетворенной на 60 ед.  
Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x42=0.

**Транспортная задача**. **Распределительным методом.**  
Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.  
Распределительный метод является одним из вариантов базового симплексного метода. Поэтому идея распределительного метода (как и симплексного) содержит такие же три существенных момента.  
Прежде всего отыскивается какое-то решение задачи — исходный опорный план. Затем посредством специальных показателей опорный план проверяется на оптимальность. Если план оказывается не оптимальным, переходят к другому плану. При этом второй и последующие планы должны быть лучше предыдущего. Так за несколько последовательных переходов от не оптимального плана приходят к оптимальному.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7 | 13 | 9 | 8 | 240 |
| A2 | 14 | 8 | 7 | 10 | 40 |
| A3 | 3 | 15 | 20 | 6 | 110 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.  
∑ a = 240 + 40 + 110 = 390  
∑ b = 90 + 190 + 40 + 130 = 450  
Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу с запасом груза, равным 60 (390—450). Тарифы перевозки единицы груза из базы во все магазины полагаем равны нулю.  
Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7 | 13 | 9 | 8 | 240 |
| A2 | 14 | 8 | 7 | 10 | 40 |
| A3 | 3 | 15 | 20 | 6 | 110 |
| A4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Первая итерация заключается в определении исходного опорного плана и проверке его на оптимальность.  
**Определение исходного опорного плана**. Первый опорный план может быть найден посредством различных способов: по правилу северо-западного угла, приоритету ближайших пунктов, способу минимального элемента С=(cij), способу Фогеля и по способу Лебедева-Тихомирова.  
**Этап I. Поиск первого опорного плана**.  
1. Используя *метод наименьшей стоимости*, построим первый опорный план транспортной задачи.  
Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую, и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел ai, или bj.  
Затем, из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя.  
Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.  
Искомый элемент равен c31=3. Для этого элемента запасы равны 110, потребности 90. Поскольку минимальным является 90, то вычитаем его.  
x31 = min(110,90) = 90.  
Искомый элемент равен c11=7, но т.к. ограничения выполнены, то x11=0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | B1 | B2 | B3 | B4 | Запасы |
| A1 | 7[0] | 13[130] | 9 | 8[110] | 240 |
| A2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 | 40 |
| A3 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] | 110 |
| A4 | 0 | 0[60] | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все грузы из баз вывезены, потребность магазинов удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.  
2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть m + n - 1 = 7. Следовательно, опорный план является невырожденным.  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
F(x) = 13\*130 + 8\*110 + 7\*40 + 3\*90 + 6\*20 + 0\*60 = 3240  
Значение целевой функции для этого опорного плана равно:  
13\*130 + 8\*110 + 7\*40 + 3\*90 + 6\*20 + 0\*60 = 3240  
**Этап II. Улучшение опорного плана**.  
**Проверка опорного плана на оптимальность.** Чтобы установить является ли опорный план оптимальным, надо проверить, как повлияет на величину целевой функции любое возможное перераспределение поставок.  
План распределения поставок будет оптимальным лишь в том случае, когда целевая функция имеет минимальное значение, т.е. когда дальнейшее уменьшение затрат на поставку будет невозможно.  
Проверим возможность уменьшения суммарных затрат на поставку продукции. С этой целью для каждой свободной от поставки клетки определяется величина Δij, характеризующая изменение суммарных затрат на поставку (в расчете на единицу перераспределяемой продукции), при условии включения в план единичной поставки хij=1 от поставщика Аi к потребителю Вj.  
При этом должно быть произведено такое изменение остальных поставок, чтобы получившаяся совокупность поставок не нарушала баланса спроса и поставок транспортной задачи.  
Величина Δij называется **оценкой свободной клетки** (или характеристика).  
В исходном решении задачи имеются клетки свободные от поставок.  
Необходимо вычислить значение оценок Δij для этих свободных от поставок клеток. С этой целью для каждой свободной клетки составляется означенный цикл перерасчета (или замкнутая цепь, круг, кольцо, контур и т.д.).  
**Под циклом пересчета (цепью)** понимается замкнутая ломаная линия. Вершинами цикла (цепи) являются клетки таблицы, проще – вершины лежат в клетках таблицы.  
Причем одна из вершин находится в свободной от поставки клетке, в той, для которой определяется оценка Δij. Все другие вершины находятся в базисных клетках, т.е. клетках, занятых поставками.  
Вершины, в которых поставки при перераспределении увеличиваются, отмечаются плюсом и называются положительными вершинами и, наоборот, вершины, в которых поставки при перераспределении уменьшаются отмечаются минусом и называются отрицательными вершинами.  
В цикле знаки по вершинам расставляют начиная с вершины, лежащей в свободной клетке, для которой определяется Δij. В нее записывают знак плюс, затем знаки по вершинам чередуются: минус, плюс , минус, плюс и т. д., независимо от того, расставляют ли их по часовой стрелке или в обратном направлении. Таким образом, в цикле всегда насчитывается одинаковое число положительных и отрицательных вершин.  
Следующий этап решения транспортной задачи заключается в улучшении опорного плана.  
Если при каком-то опорном плане оказывается несколько свободных клеток с отрицательными оценками Δij, то за один переход к лучшему плану можно занять поставкой только одну клетку – ту, которая обеспечивает наибольшее снижение целевой функции.  
**Шаг 1**. Определяем оценку для каждой свободной клетки.  
**(3;2)**: В свободную клетку (3;2) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 7[0][+] | 13[130][-] | 9 | 8[110] | 240 |
| 2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 | 40 |
| 3 | 3[90][-] | 15[+] | 20 | 6[20] | 110 |
| 4 | 0 | 0[60] | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Цикл приведен в таблице (3,2 → 3,1 → 1,1 → 1,2).  
Оценка свободной клетки равна Δ32 = (15) - (3) + (7) - (13) = 6.  
**(4;1)**: В свободную клетку (4;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 7[0][-] | 13[130][+] | 9 | 8[110] | 240 |
| 2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 | 40 |
| 3 | 3[90] | 15 | 20 | 6[20] | 110 |
| 4 | 0[+] | 0[60][-] | 0 | 0 | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Цикл приведен в таблице (4,1 → 4,2 → 1,2 → 1,1).  
Оценка свободной клетки равна Δ41 = (0) - (0) + (13) - (7) = 6.  
**(4;4)**: В свободную клетку (4;4) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | Запасы |
| 1 | 7[0][-] | 13[130][+] | 9 | 8[110] | 240 |
| 2 | 14 | 8 | 7[40] | 10 | 40 |
| 3 | 3[90][+] | 15 | 20 | 6[20][-] | 110 |
| 4 | 0 | 0[60][-] | 0 | 0[+] | 60 |
| Потребности | 90 | 190 | 40 | 130 |  |

Цикл приведен в таблице (4,4 → 4,2 → 1,2 → 1,1 → 3,1 → 3,4).  
Оценка свободной клетки равна Δ44 = (0) - (0) + (13) - (7) + (3) - (6) = 3.  
Из приведенного расчета видно, что ни одна свободная клетка не имеет отрицательной оценки, следовательно, дальнейшее снижение целевой функции Fx невозможно, поскольку она достигла минимального значения.  
Таким образом, последний опорный план является оптимальным.  
Минимальные затраты составят: 13\*130 + 8\*110 + 7\*40 + 3\*90 + 6\*20 + 0\*60 = 3240  
Если в оптимальном решении задачи имеется несколько оценок равных нулю, то это является свидетельством того, что среди бесчисленного множества решений этой задачи существуют еще решения, являющиеся также оптимальными, поскольку значение целевой функции остается одинаковым — минимальным. Их принято называть **альтернативными**.  
**Примечание**. Основной алгоритм распределительного метода является не лучшим методом решения транспортных задач, так как на каждой итерации для проверки опорного плана на оптимальность приходилось строить [mп—(m+n—1)] циклов пересчета, что при больших размерах матрицы оказывается очень громоздким и трудоемким делом. Так, для расчетов по матрице 10х10 на каждой итерации надо строить 81 цикл, а по матрице 20x20 — 361 цикл.  
**Анализ оптимального плана**.  
Из 1-го склада необходимо груз направить в 2-й магазин (130 ед.), в 4-й магазин (110 ед.)  
Из 2-го склада необходимо весь груз направить в 3-й магазин.  
Из 3-го склада необходимо груз направить в 1-й магазин (90 ед.), в 4-й магазин (20 ед.)  
Потребность 2-го магазина остается неудовлетворенной на 60 ед.  
Оптимальный план является вырожденным, так как базисная переменная x42=0.